ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021-22

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ / ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΟΣ

ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΔΙΟΡΘΩΤΕΣ

Επισημαίνεται ότι οι διορθωτές πρέπει να ακολουθούν πιστά τις οδηγίες βαθμολόγησης όσον αφορά στην κατανομή των μονάδων, χωρίς να προβαίνουν σε υποδιαίρεση της βαθμολογίας

ΜΕΡΟΣ Α:

Α1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 (x^3 + e^x - 8)dx$$

Λύση:

$$\int_0^4 (x^3 + e^x - 8)dx = \left[\frac{x^4}{4} + e^x - 8x\right]_0^4 \qquad \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$$

$$= \frac{4^4}{4} + e^4 - 8 \cdot 4 - e^0 \qquad \boxed{1}$$

$$= e^4 + 31 \qquad \boxed{1}$$

Α2. (α) Να δείξετε ότι $\forall \nu \epsilon \mathbb{N}$,

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (6\kappa^2 - 2\kappa) = 2\nu^2(\nu + 1) \qquad (3μ)$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{24} (6\kappa^2 - 2\kappa) \qquad (2μ)$$

Λύση:

(α) Είναι

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (6\kappa^2 - 2\kappa) = 6\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 - 2\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa$$

$$\boxed{1} \qquad = 6 \cdot \frac{1}{6}\nu(\nu + 1)(2\nu + 1) - 2 \cdot \frac{1}{2}\nu(\nu + 1) \qquad \boxed{1}$$

$$= \nu(\nu + 1)(2\nu + 1 - 1) \qquad \boxed{0.5}$$

$$= 2\nu^2(\nu + 1) \qquad \boxed{0.5}$$

Αν γράψει μόνο:

$$\boldsymbol{6\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 - 2\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa}$$

παίρνει 1μ.

(β) Για $\nu = 24$, έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{24} (6\kappa^2 - 2\kappa) = 2 \cdot 24^2(24 + 1) = 2 \cdot 24^2 \cdot 25 = 28800 \qquad \boxed{1}$$

$$\boxed{1}$$

Α3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας της παραβολής και την εξίσωση της διευθετούσας της. (2μ)

(β) Να βρείτε την τιμή του $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = x + c$ να εφάπτεται της παραβολής. (3μ)

Λύση:

1

(α) Είναι $4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Η εστία έχει συντεταγμένες $E(2,0)$ και η εξίσωση της διευθετούσας είναι η $x = -2$ 1

0.5

Αν γράψει μόνο $\alpha = 2$, παίρνει 0.5μ

0.5

(β) $\left.\begin{aligned} y^2 &= 8x \\ y &= x + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x+c)^2 = 8x \Leftrightarrow x^2 + (2c-8)x + c^2 = 0$

Η ευθεία εφάπτεται της παραβολής $\Leftrightarrow \Delta = 0$ 0.5

$\Leftrightarrow (2c-8)^2 - 4c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow 4c^2 - 32c + 64 - 4c^2 = 0 \Leftrightarrow 32c = 64 \Leftrightarrow c = 2$

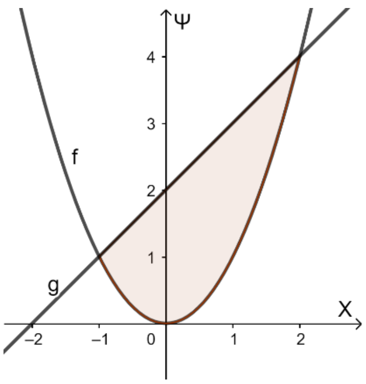
0.5 0.5 0.5

Α4. (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, όπου $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ (2μ)

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων. (3μ)

Λύση:

(α)



Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g :

$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$

0.5

Το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με

0.5

$$E = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$ 0.5

Αν έχει λάθος όρια ολοκληρώματος, τότε αφαιρείται 1μ. και δίνεται μόνο 0.5μ. αν ολοκληρώσει ορθά.

0.5

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

Αν δεν βάλει τ.μ. δεν αφαιρούνται μονάδες. Αν βρει απάντηση ορθή με χρήση Υ/Μ δίνονται οι μονάδες.

(β) Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι ίσος με

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(\left(g(x)\right)^2 - (f(x))^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} ((x+2)^2 - (x^2)^2) dx$$ 1

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx$$ 0.5

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2}$$ 1

Στο πιο πάνω βήμα, αν οποιαδήποτε 2 από τα 4 ολοκληρώματα είναι σωστά, παίρνει 0.5μ.

$$= \pi \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \frac{2^5}{5} \right) - \pi \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1)^2 + 4(-1) - \frac{(-1)^5}{5} \right)$$

$$= \frac{72\pi}{5} \text{ κ.μ.}$$ 0.5

Αν παραλείψει το π από το 1ο βήμα ή από την απάντηση, αφαιρείται 0.5μ.
Αν γράψει μόνο το 1ο βήμα, παίρνει 0.5μ.
Αν δεν βάλει κ.μ. δεν αφαιρούνται μονάδες.

2ος τρόπος 1 0.5

$$V = V\kappa όλουρου\ \kappa ώνου - \pi \int_{-1}^{2} ((x^2)^2) dx = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2) - \pi \int_{-1}^{2} x^4 dx$$

0.5 $$= \frac{\pi \cdot 3}{3}(4^2 + 4 \cdot 1 + 1^2) - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2}$$ 0.5

$$= 21\pi - \pi \left[\frac{2^5}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right]$$

$$= 21\pi - \frac{33}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi\ \kappa.\mu.$$ 0.5

Α5. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους 4 διαφορετικά χρυσόψαρα μπορούν να τοποθετηθούν σε 5 αριθμημένες γυάλες ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$), αν:

(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός (2μ)

(β) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε διαφορετικές γυάλες (2μ)

(γ) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε ακριβώς 3 γυάλες. (1μ)

Λύση:

(α) **1ος τρόπος**

Κάθε τοποθέτηση των 4 χρυσόψαρων στις 5 γυάλες, χωρίς κανένα περιορισμό ισοδυναμεί με μια επαναληπτική διάταξη 5 αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς η τοποθέτηση των χρυσόψαρων μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\delta_4^5 = 5^4 = 625$ διαφορετικούς τρόπους.

1.5 0.5 ***Αν γράψει μόνο 625, παίρνει 0.5μ.***

2^{ος} τρόπος

Φάσεις	1° Χρ.	2° Χρ.	3° Χρ.	4° Χρ.
Τρόποι	5	5	5	5

Από πολλαπλασιαστική αρχή θα έχουμε $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ διαφορετικούς τρόπους.

1.5 0.5

(β) **1^{ος} τρόπος**

Κάθε τοποθέτηση των 4 χρυσόψαρων σε διαφορετικές γυάλες ισοδυναμεί με μια απλή διάταξη 5 διαφορετικών αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς η τοποθέτηση των χρυσόψαρων μπορεί να πραγματοποιηθεί με

$Δ_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$ διαφορετικούς τρόπους.

1.5 0.5

Αν γράψει μόνο 120, παίρνει 0.5μ.

2^{ος} τρόπος

Φάσεις	1° Χρ.	2° Χρ.	3° Χρ.	4° Χρ.
Τρόποι	5	4	3	2

Από πολλαπλασιαστική αρχή θα έχουμε $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ διαφορετικούς τρόπους.

1.5 0.5

3^{ος} τρόπος

Από τις 5 γυάλες επιλέγουμε τις 4 με $\binom{5}{4}$ διαφορετικούς τρόπους. Στη συνέχεια τοποθετούμε 1 χρυσόψαρο σε κάθε μια από τις 4 γυάλες με $4!$ τρόπους. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε συνολικά $\binom{5}{4} \cdot 4! = 120$ διαφορετικούς τρόπους.

1.5 0.5

(γ) **1^{ος} τρόπος**

Από τις 5 γυάλες επιλέγουμε τις 3 με $\binom{5}{3}$ διαφορετικούς τρόπους.

Στη συνέχεια, τοποθετούμε 2 χρυσόψαρα στη μια γυάλα και από 1 χρυσόψαρο στις άλλες 2 γυάλες. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{4}{2} \cdot 3!$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε συνολικά $\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3! = 360$ διαφορετικούς τρόπους.

0.5 0.5

2^{ος} τρόπος

Από τις 5 γυάλες επιλέγουμε τις 3 με $\binom{5}{3} = 10$ διαφορετικούς τρόπους. Στη συνέχεια, τοποθετούμε 2 χρυσόψαρα στη μια γυάλα και από 1 χρυσόψαρο στις άλλες 2 γυάλες. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = 36$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε συνολικά $\binom{5}{3} \cdot 36 = 360$ διαφορετικούς τρόπους.

0.5 0.5

Α6. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ και τυχαίο σημείο της $T(\alpha συνθ, \beta ημθ), 0<\theta<\frac{\pi}{4}$.
Η περίμετρος του τριγώνου ETE' είναι ίση με 16 μονάδες.

(α) Να βρείτε τις τιμές των α και β. (1,5μ)
(β) Αν $\alpha=5$ και $\beta=4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο T είναι η

$$(\varepsilon): 4x συνθ + 5y ημθ = 20$$ (1,5μ)

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Δ. Αν O η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο $E=\frac{20}{ημ2θ}$ (1μ)
(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου T έτσι ώστε το πιο πάνω εμβαδόν να είναι ίσο με $\frac{40}{\sqrt{3}}$ τ.μ. (1μ)

Λύση:
(α) Αφού $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ οι εστίες της έλλειψης έχουμε ότι $\gamma=3$ και $\alpha>\beta$

$$\Pi_{ETE'} = TE+TE'+EE'$$

Όμως $TE+TE'=2\alpha$ από τον ορισμό της έλλειψης 0.5

$$\Leftrightarrow 16 = 2\alpha+2\gamma$$

$$\Leftrightarrow 16 = 2\alpha+6 \Leftrightarrow 2\alpha = 10 \Rightarrow \alpha=5$$ 0.5

$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2 \Rightarrow 3^2=5^2-\beta^2$$

$$\Rightarrow \beta^2=16$$

$$\Rightarrow \beta=4$$ 0.5

(β) Η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Έχουμε ότι

$$\frac{2x}{25}+\frac{2yy'}{16}=0 \Rightarrow \frac{yy'}{16}=-\frac{x}{25}$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{16x}{25y}$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $T(5συνθ, 4ημθ)$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{16\cdot 5συνθ}{25\cdot 4ημθ}=-\frac{4συνθ}{5ημθ}$$ 0.5

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $T(5συνθ, 4ημθ)$ είναι

$$y-y_1=\lambda_{\varepsilon\varphi}(x-x_1) \Rightarrow y-4ημθ=-\frac{4συνθ}{5ημθ}(x-5συνθ)$$ 0.5

$$\Rightarrow 5yημθ-20ημ^2θ=-4xσυνθ+20συν^2θ$$

$$\Rightarrow 4xσυνθ+5yημθ=20ημ^2θ+20συν^2θ$$

$$\Rightarrow 4xσυνθ+5yημθ=20(ημ^2θ+συν^2θ)$$

$$\Rightarrow 4xσυνθ+5yημθ=20$$ 0.5

Αν αντικαταστήσει απευθείας το σημείο Τ στην $\frac{xx_1}{25}+\frac{yy_1}{16}=1$, δεν παίρνει μονάδες.

(γ) Στο σημείο $Γ$, $y=0$

$$4x\text{συνθ}+5\cdot 0\cdot\text{ημθ}=20\Longrightarrow x=\frac{5}{\text{συνθ}}$$

Συνεπώς,

$$Γ\left(\frac{5}{\text{συνθ}},0\right)$$

Στο σημείο $Δ$, $x=0$

$$4\cdot 0\cdot\text{συνθ}+5y\text{ημθ}=20\Longrightarrow y=\frac{4}{\text{ημθ}}$$

Συνεπώς,

$$Δ\left(0,\frac{4}{\text{ημθ}}\right)$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $ΟΓΔ$ είναι

$$\begin{aligned}E&=\frac{βάση\cdot ύψος}{2}\\&=\frac{\left|\frac{5}{\text{συνθ}}\right|\left|\frac{4}{\text{ημθ}}\right|}{2}\\&=\frac{20}{2\text{ημθσυνθ}}\\&=\frac{20}{\text{ημ}2\text{θ}}\end{aligned}$$

0.5

0.5

Αν βρει μόνο τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ, παίρνει 0.5 μονάδα.
Αν δεν χρησιμοποιήσει απόλυτα, δεν αφαιρούνται μονάδες.

(δ) Είναι

$$\begin{aligned}E&=\frac{40}{\sqrt{3}}\Longrightarrow\frac{20}{\text{ημ}2\text{θ}}=\frac{40}{\sqrt{3}}\\&\Longrightarrow 20\sqrt{3}=40\text{ημ}2\text{θ}\\&\Longrightarrow\text{ημ}2\text{θ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

0.5

Αφού $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ έχουμε ότι $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ και
$2\theta=\frac{\pi}{3}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$

Οι συντεταγμένες του σημείου T είναι

$$\begin{aligned}&T\left(5\text{συν}\frac{\pi}{6},4\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)\\&\Longrightarrow T\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},2\right)\end{aligned}$$

0.5

Αν δεν υπολογίσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του σημείου $T\left(5συν\frac{\pi}{6},4ημ\frac{\pi}{6}\right)$, δεν αφαιρούνται μονάδες.

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>:

Β1. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\text{συν}x}{1+e^x}dx \quad \text{και} \quad B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}x}{1+e^x}dx$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=-u$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $A=B$ (4μ)

(β) Να δείξετε ότι $A+B=2$ (4μ)

(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα A. (2μ)

Λύση:

(α) Είναι

$$x=-u\Longrightarrow dx=-du \quad \boxed{0.5}$$

και

$$\boxed{0.5}\quad x=-\frac{\pi}{2}\Longrightarrow u=\frac{\pi}{2}, \qquad x=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow u=-\frac{\pi}{2}\quad \boxed{0.5}$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
A&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\text{συν}x}{1+e^x}dx\\
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-u}\text{συν}(-u)}{1+e^{-u}}(-du) && \boxed{0.5}\\
&=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}u}{e^u+1}du && \boxed{1}\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}u}{1+e^u}du && \boxed{0.5}\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}x}{1+e^x}dx && \boxed{0.5}\\
&=B
\end{aligned}
$$

(β) Είναι

$$
\begin{aligned}
A+B&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\text{συν}x}{1+e^x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}x}{1+e^x}dx\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x\text{συν}x}{1+e^x}+\frac{\text{συν}x}{1+e^x}\right)dx && \boxed{1}\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x\text{συν}x+\text{συν}x}{1+e^x}\right)dx && \boxed{0.5}\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\text{συν}x\left(\frac{1+e^x}{1+e^x}\right)\right)dx && \boxed{0.5}
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x)dx$$ 0.5

$$= [\eta\mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$ 0.5

$$= \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$ 0.5

$$= 2$$ 0.5

Αν παραλείψει το βήμα: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, αλλά βρει ορθή απάντηση, δεν αφαιρούνται μονάδες.

(γ) Αφού $A = B$ και $A + B = 2$ έχουμε ότι

$$A + B = 2 \Longrightarrow A + A = 2$$ 1

$$\Longrightarrow A = 1$$ 1

Β2. Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Να υπολογίσετε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου Ω, χωρίς επανάληψη ψηφίου, αν αυτοί:

(α) είναι περιττοί (3μ)

(β) αρχίζουν με το ψηφίο 4 (3μ)

(γ) είναι περιττοί και αρχίζουν με το ψηφίο 4 (3μ)

(δ) είναι περιττοί ή αρχίζουν με το ψηφίο 4. (1μ)

Λύση:

(α) Για τον σχηματισμό των τριψήφιων περιττών έχουμε 3 επιλογές (1,3,5) για την θέση των μονάδων και για τις άλλες 2 θέσεις 5 και 4 επιλογές αντίστοιχα.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	4	3

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διαφορετικών τριψήφιων περιττών είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 1

0.5 0.5 1

(β) Για τον σχηματισμό των τριψήφιων που αρχίζουν με το ψηφίο 4 έχουμε 1 επιλογή (το 4) για την θέση των εκατοντάδων και για τις άλλες 2 θέσεις 5 και 4 επιλογές αντίστοιχα.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
1	5	4

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διαφορετικών τριψήφιων που αρχίζουν με το ψηφίο 4 είναι $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$ 1

1 0.5 0.5

(γ) Για τον σχηματισμό των τριψήφιων περιττών που αρχίζουν με το ψηφίο 4 έχουμε 1 επιλογή (το 4) για την θέση των εκατοντάδων, 3 επιλογές για τη θέση των μονάδων (1,3,5) και για τη θέση των δεκάδων 4 επιλογές.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
1	4	3

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διαφορετικών τριψήφιων περιττών που αρχίζουν με το ψηφίο 4 είναι $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ 0.5

1 0.5 1

(δ) Έστω το σύνολο $A =$ «Ο αριθμός είναι περιττός», τότε από το ερώτημα (α), έχουμε ότι $\nu(A) = 60$

Έστω το σύνολο $B =$ «Ο αριθμός αρχίζει με το ψηφίο 4», τότε από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $\nu(B) = 20$

Το σύνολο $A \cap B =$ «ο αριθμός είναι περιττός και αρχίζει με το ψηφίο 4» και από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $\nu(A \cap B\ ) = 12$

Τότε το σύνολο $A \cup B$ = «Ο αριθμός είναι περιττός ή αρχίζει με το ψηφίο 4» και από την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε ότι

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = 60 + 20 - 12 = 68$$

0.5 0.5

Β3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και τυχαίο σημείο της $T(t^2, 2t)\ , t \neq 0$.

(α) Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από την εστία E της παραβολής και είναι κάθετη στην OT (όπου O η αρχή των αξόνων). Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε_1) είναι η

$$(\varepsilon_1) : y = -\frac{t}{2}(x-1)$$ (3μ)

(β) Η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$ και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο T. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε_2) είναι η

$$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{t}(x+1)$$ (4μ)

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής Σ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα. (3μ)

Λύση:

(α) Είναι $4a = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1$ άρα η εστία έχει συντεταγμένες $E(1,0)$ 1

Υπολογίζουμε την κλίση του OT:

$$\lambda_{OT} = \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t} \quad , \quad \lambda_{OT} . \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \quad \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{t}{2}$$ 0.5

0.5

Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε_1) είναι η

$$y = -\frac{t}{2}(x-1)$$ 1

Αν γράψει μόνο $\alpha = 1$, παίρνει 0.5μ.

Αν γράψει μόνο $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$, παίρνει 0.5μ από την τελευταία 1 μ.

(β) Είναι

$y^2 = 4x \Longrightarrow 2yy' = 4 \Longrightarrow y' = \frac{2}{y}$ 1.5

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο T είναι ίση με $\lambda_{\varepsilon\varphi/T} = y'_{/T} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$ 1.5

Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε_2) είναι η

$y = \frac{1}{t}(x+1)$ 1

Αν γράψει μόνο $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$, παίρνει 0.5μ από την τελευταία 1 μ.

(γ) Το σημείο Σ είναι η λύση του συστήματος εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{t}{2}(x-1) \\ y &= \frac{1}{t}(x+1) \end{aligned}\right\}$$

Απαλείφουμε την παράμετρο t πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις.

Έχουμε

$y^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$ 1

Οποιοσδήποτε τρόπος προσπάθειας επίλυσης συστήματος των 2 εξισώσεων, παίρνει 1μ. και 1μ. στην ορθή εύρεση του γ.τ. του σημείου Σ σε οποιαδήποτε μορφή (Σύνολο 2μ.)

$\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$ 1

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$\Longrightarrow$Έλλειψη με $\alpha^2 = 1 \Longrightarrow \alpha = 1$

και $\beta^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

και επειδή $\alpha > \beta \Longrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0.5

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ίση με $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0.5